Aufgabe 1: [A12] Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für $\vec{b} = \mu\vec{a} + \lambda\vec{c}$ gilt. Hinweis: Berechnen Sie die Parameter μ und λ.

b) Aus welcher Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man den Vektor $\vec{c}$? Bestimmen Sie die Parameter.

Aufgabe 2: [A13] Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z$ und $\vec{b} = 2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + \vec{e}_z$. Berechnen Sie $2\vec{a} + 4\vec{b}$ und $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Aufgabe 3: [A16] a) Welche der Vektoren sind kollinear?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Vektoren sind komplanar?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: [A17]

a) Wie muss man x und z wählen, damit die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$ kollinear sind?

b) Wie muss man y wählen, damit die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -9 \end{pmatrix}$ komplanar sind?

Aufgabe 5: [A18]

Zeigen Sie, dass sich die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -12\text{ N} \\ 1\text{ N} \\ 10\text{ N} \end{pmatrix}$ in die Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ zerlegen lässt. Geben Sie die Komponenten $\vec{F}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{F}_b$ in Richtung von $\vec{b}$ an.

Aufgabe 6: [A19] Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Länge der gegebenen Vektoren.

b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aufgabe 7: [A20]

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

b) Wie muss man y wählen, damit die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen?

Aufgabe 8: [A21] Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

b) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{e}_x$ und $\vec{b} \cdot \vec{e}_y$.

c) Welchen Winkel schließt $\vec{a}$ mit der x-Achse und $\vec{b}$ mit der y-Achse ein?

Aufgabe 9: [A22] Wie muss man y und z wählen, damit der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ senkrecht zu der Ebene ist, die von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird?

Aufgabe 10: [A23b] Den Vektor $\vec{b}_a$ nennt man Projektionsvektor des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$. Berechnen Sie $\vec{b}_a$ und $\vec{a}_b$, wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11: [A24] Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie einen Vektor an, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht ist. Berechnen Sie diesen Vektor auf verschiedenen Wegen.

Aufgabe 12: [A26] Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(4\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - 4\vec{b})$, indem Sie

a) zuerst die Koordinaten einsetzen und anschließend multiplizieren.

b) zuerst multiplizieren und anschließend die Koordinaten einsetzen.

Aufgabe 13: [A32]

a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind. Hinweis: Vektoren sind komplanar, wenn $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ gilt.

b) Ist es möglich, den Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen?

c) Welche Vektoren sind kollinear?

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14: [A36] Eine Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(2,-4,3)$ und $P_2(1,-12,-3)$.

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Gerade an.

b) Überprüfen Sie, ob die Punkte $P_3(4,12,15)$ und $P_4(-1,3,0)$ auf der Gerade liegen.

Aufgabe 15: [A37] Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_3 : \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_4 : \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Welche Geraden sind parallel? Welche Geraden sind identisch?

Aufgabe 16: [A40] Gegeben sind die vier Punkte $P_1(2,-1,-2)$, $P_2(8,3,-4)$, $P_3(1,-7,3)$ und $P_4(-4,3,-7)$.

a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_3P_4.

c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Geraden P_1P_2 und P_3P_4.

Aufgabe 17: [A41] Gegeben ist die Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Begründen Sie, weshalb die Gerade in der xy-Ebene liegt.

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden in parameterfreier Form ($y = m \cdot x + n$) an.

Aufgabe 18: [A45] Prüfen Sie, ob die beiden Geraden $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen. Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Ebene an.

Aufgabe 19: [A47] Die Geraden $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind parallel. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die durch diese Geraden festgelegt wird. Untersuchen Sie, ob eine der beiden Geraden $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix}$ ebenfalls in dieser Ebene liegt.

Aufgabe 20: [A48] Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g und der Ebene E. Die Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(-10,-10,6)$ und $P_2(-3,4,-15)$. Die Parametergleichung der Ebene lautet

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21: [A58] Gegeben sind die drei Punkte $P_1(7,5,8)$, $P_2(11,20,10)$ und $P_3(1,-16,6)$. Eine Ebene wird durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 festgelegt. Geben Sie eine Gleichung der Ebene

a) in der Parameterform an.

b) in Koordinatenform an.

c) in Normalenform an.

Aufgabe 22: [A60] Gegeben sind die drei Ebenen

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : -9 \cdot x + y + 7 \cdot z = 12$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix} \vec{r} - 100 = 0$$

Welche Lage haben diese Ebenen zueinander?

Aufgabe 23: [A61] Gegeben ist die Ebene $12 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z = 26$. Welchen Abstand hat diese Ebene vom Ursprung? Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(36,-13,19)$ von dieser Ebene?

Aufgabe 24: [A62] Gegeben ist der Punkt $P_1(3,4,4)$. Geben Sie eine Ebenengleichung durch P_1 an, die senkrecht zur y-Achse ist.

Aufgabe 25: [A63] Gegeben ist die Ebene $E : 6x - 2y - 3z = 14$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung, die zu E parallel ist und von E den Abstand 4 hat.

Aufgabe 26: [A64] Bestimmen Sie die Eckpunkte und die Länge der Höhen des von den Geraden
$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_2 : -2 \cdot x + y = -3$ und $g_3 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{r} = 22$ gebildeten Dreiecks.